JUEGOS DE SUMA CERO CON DOS JUGADORES

Para definir un juego en **forma normal o estratégica** de dos jugadores es necesario especificar las estrategias de cada jugador y los pagos que se derivan de cada estrategia de cada uno de los jugadores.
Además, en este juego los jugadores **eligen sus estrategias de forma simultánea**, es decir, que cada jugador elige su jugada sin conocer las decisiones de los demás. Además toda la **información** anterior es **del dominio público**: es conocida por ambos jugadores y ambos saben que el otro jugador también la conoce. Se supone que ambos jugadores toman **decisiones racionales**.

Las estrategias de cada jugador se supe inicialmente que son un número finito:
$\{s_1, s_2, ..., s_m\}$ para el jugador I
$\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ para el jugador II

Las funciones de pago señalan que si I elige la estrategia s_i y II elige la t_j el jugador I recibe el pago a_{ij} y el II el pago b_{ij}:
$a_{ij} = u_1(s_i, t_j)$ para el jugador I
$b_{ij} = u_2(s_i, t_j)$ para el jugador II

Un juego en forma normal de dos jugadores donde cada uno cuenta con un número finito de estrategias se puede representar por una expresión **bimatricial** de la forma

	t_1	t_2		t_j		t_n
s_1	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})				(a_{1n},b_{1n})
s_2	(a_{11},b_{11})	(a_{11},b_{11})				
s_j	…………	………….	………...	(a_{ij},b_{ij})	………..	…………...
s_m	(a_{m1},b_{m1})	(a_{m2},b_{m2})				(a_{mn},b_{mn})

Un juego es de **suma cero** cuando $a_{ij} + b_{ij} = 0$
En tal caso lo que gana uno de los jugadores es lo mismo que pierde el otro: $a_{ij} = -b_{ij}$.

Ejemplo

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	-1	3	-1	-2
s_2	1	2	0	1
s_3	-1	-3	0	2

Si I juega s_1 y II juega t_2 , I recibe 3 y II recibe –3 (pierde 3).
En un juego de suma cero el jugador I es un maximizador (pues busca aquella estrategia que maximice su ganancia en la matriz de pagos), mientras que el jugador II es un minimizador en la matriz de pagos.

JUEGOS DE SUMA CONSTANTE

En este caso $a_{ij} + b_{ij} = a = cte.$ para cada i y j.
Entonces $(a_{ij}, b_{ij}) = (a_{ij}, a - a_{ij})$.

Un juego de suma constante es equivalente a otro de suma cero donde restamos $\frac{a}{2}$ a cada elemento con el fin de comparar lo que cada pago se encuentra por encima y por debajo de la media $\frac{a}{2}$.

$$(a_{ij}, b_{ij}) = (a_{ij}, a - a_{ij}) \cong (a_{ij} - \frac{a}{2}, a - a_{ij} - \frac{a}{2}) = (a_{ij} - \frac{a}{2}, -a_{ij} + \frac{a}{2}) = (\hat{a}_{ij}, \hat{b}_{ij})$$

que es un juego de suma cero al resultar que $\hat{a}_{ij} + \hat{b}_{ij} = 0$.

ESTRATEGIAS ESTRICTAMENTE DOMINADAS

Consideremos el juego

	t_1		t_r		t_s		t_n
s_1	a_{11}		a_{1r}		a_{1s}		a_{1n}
s_i	a_{i1}		a_{ir}		a_{is}		a_{in}
s_j	a_{j1}		a_{jr}		a_{js}		a_{jn}
s_m	a_{m1}		a_{mr}		a_{ms}		a_{mn}

La estrategia s_i esta estricta o fuertemente dominada por la estrategia s_j cuando
$a_{i1} \leq a_{j1}$, $a_{i2} \leq a_{j2}$,.........., $a_{in} \leq a_{jn}$
y en algún caso se da la desigualdad estricta.

La estrategia t_r esta estricta o fuertemente dominada por la estrategia t_s cuando
$a_{1r} \geq a_{1s}$, $a_{2r} \geq a_{2s}$,..........., $a_{mr} \geq a_{ms}$
y en algún caso se da la desigualdad estricta.

Ejemplo:
Consideremos el juego donde el jugador I elige un número entero entre el 1 y el 5, y el jugador II un número entre 1 y 4. Si I elige i y II elige j entonces II paga a I a_{ij}=i+j unidades monetarias.

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	2	3	4	5
s_2	3	4	5	6
s_3	4	5	6	7
s_4	5	6	7	8
s_5	6	7	8	9

Obsérvese que la estrategia s_5 del jugador I domina estrictamente a todas sus demás estrategias, mientras que la estrategia t_1 del jugador II domina a todas sus estrategias.

Principio de racionalidad:
Un jugador racional no utiliza estrategias estrictamente dominadas por otras.

Algunos juegos pueden resolverse mediante dicho principio de racionalidad procediendo a la **eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas**, reduciendo cada juego a una estrategia para cada uno de los jugadores.

Ejemplo: Consideremos el juego

	t_1	t_2	t_3
s_1	2	1	4
s_2	-1	0	6

Eliminando t_3 por estar dominada por t_2, el juego se reduce a

	t_1	t_2
s_1	2	1
s_2	-1	0

Eliminando s_2 por estar dominada por s_1 resulta

	t_1	t_2
s_1	2	1

Donde el jugador II nunca jugaría t_1, por lo que la solución del juego sería (s_1,t_2), en el sentido en que dos jugadores racionales jugarían cada uno estas estrategias.

Ejercicio

Consideremos el juego

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	2	6	1	2
s_2	3	5	4	3
s_3	1	0	2	4

Demostrar mediante la eliminación iterativa de estrategias que tiene por solución (s_2,t_1).

No obstante existen juego que no pueden resolverse por el principio de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas como ocurre con los juegos que se señalan a continuación:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 10 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 8 & 10 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Por tanto será preciso buscar principios y conceptos más universales a la hora de resolver un juego de suma cero.

ESTRATEGIAS DE EQUILIBRIO

Dado un juego

	t_1	………...	t_n
s_1	a_{11}	………..	a_{1n}
….		………..	
s_m	a_{m1}	………...	a_{mn}

Un par de estrategias es **estable** o está **en equilibrio** cuando **ningún jugador tiene incentivos para cambiar de estrategia si el otro no cambia**.
El par (s,t) estarán en equilibrio si I, esperando que II juegue t, no tiene nada que ganar al no jugar s, y II, esperando que I juegue s, no tiene ningún incentivo para cambiar su estrategia t. Racionalmente ningún jugador puede esperar sacar algo cambiando de estrategia si el otro también juega racionalmente.

Dicho de otra forma, **si un jugador elige una estrategia del par de equilibrio, el otro no puede hacer otra cosa mejor que elegir la otra estrategia del par de equilibrio.**

Ejemplo

Dado el juego

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	-1	3	-1	-2
s_2	1	2	0	1
s_3	-1	-3	0	2

El par de estrategias (s_2,t_3) está en equilibrio:
Si I sabe que II jugará t_3 no cambiará su estrategia s_2. Ello se debe a que el elemento $a_{23} = 0$ es el máximo de su columna.
Si II sabe que I juega s_2 no cambiará su estrategia t_3. Ello se debe a que el elemento $a_{23} = 0$ es el mínimo de su fila.
A un elemento de una matriz como el a_{23} que es simultáneamente **mínimo de filas y máximo de columnas** se le llama un **punto de silla**. Como puede observarse, los puntos de silla están asociados a las parejas de estrategias de equilibrio.

Obsérvese que el par (s_1,t_1) no está en equilibrio:
Si II sabe que I juega s_1 entonces II no jugará t_1 sino t_4. De manera análoga si I sabe que II jugará t_1, I no jugará s_1 sino s_2.

Suele considerarse el siguiente principio como fundamental de la teoría de juegos: **Los jugadores racionales tienden a estrategias que están en equilibrio.**

Se dice que un juego tiene **solución** cuando existen **un par de estrategias que están en equilibrio**. Ningún jugador racional puede esperar algo mejor del juego que las ganancias que proporciona una estrategia de equilibrio si el otro juega racionalmente.

La pregunta que se plantea es la de ¿cómo obtener estrategias de equilibrio?

LAS ESTRATEGIAS MAXIMIN Y MINIMAX

Para obtener estrategias de equilibrio vamos a partir del supuesto de que los jugadores son conservadores y que emplean estrategias que les garanticen ciertos "niveles de seguridad".

Se llama nivel de seguridad de una estrategia s_i del jugador I al mínimo de los elementos de la fila i-ésima, es decir $\underbrace{Min}_{1\le j\le n} a_{ij}$

	t_1		t_j		t_n
s_1	a_{11}	……	a_{1j}	……	a_{1n}
s_i	a_{i1}	……	a_{ij}	……	a_{in}
s_m	a_{m1}	……	a_{mj}	……	a_{mn}

El **nivel de seguridad de la estrategia s_i** del jugador I es la **mínima ganancia que I puede obtener al jugar s_i .**
Si el jugador I es racional buscará aquella estrategia que maximice su nivel de seguridad.

Por ejemplo en el juego

	t_1	t_2	Min de filas
s_1	4	3	**3**
s_2	1	5	1

El jugador I elegirá la estrategia s_1 cuyo nivel de seguridad es 3.

Esta estrategia se llama **maximin** : El jugador selecciona aquella estrategia donde se encuentre el máximo de todos los mínimos de las filas de la matriz de pagos. Con ello maximiza su mínima ganancia garantizada en el juego.

Se llama **nivel de seguridad del jugador I** a la cantidad

$$u_1 = \underset{1\le i\le m}{Max}\ \underset{1\le j\le n}{Min}\ a_{ij}$$

Se llama **nivel de seguridad de la** estrategia t_j de II es la **máxima pérdida en que II puede incurrir al jugar esa estrategia** que será el máximo de los elementos de la j-ésima columna, es decir $\underset{1\le i\le m}{Max}\ a_{ij}$

	t_1		t_j		t_n
s_1	a_{11}	……	a_{1j}	……	a_{1n}
s_i	a_{i1}	……	a_{ij}	……	a_{in}
s_m	a_{m1}	……	a_{mj}	……	a_{mn}

Si el jugador II es racional buscará aquella estrategia que minimice su máxima perdida esperada.

Por ejemplo en el juego

	t_1	t_2
s_1	4	3
s_2	1	5
Max de columnas	**4**	5

El jugador II elegirá la estrategia t_1 cuyo nivel de seguridad es 4.

Esta estrategia se llama **minimax** : El jugador selecciona aquella estrategia donde se encuentre el mínimo de todos los máximos de las columnas de la matriz de pagos. Con ello minimiza su maxima pérdida posible en el juego.

Se llama **nivel de seguridad del jugador II** a la cantidad

$$u_2 = \underset{1\le j\le n}{Min}\ \underset{1\le i\le m}{Max}\ a_{ij}$$

<u>Teorema:</u> $u_1 \le u_2$

La desigualdad puede producirse como se muestra en el siguiente ejemplo

	t_1	t_2	Min de filas
s_1	4	3	**3**
s_2	1	5	1
Max de columnas	**4**	5	

Cuando se produce la igualdad en el teorema anterior ($u_1 = u_2$) el juego tiene solución y existen dos estrategias en equilibrio. En tal caso existe un elemento a_{hk} de la matriz del juego que es simultáneamente el mínimo de la fila h y el máximo de la columna k. Dicho elemento a_{hk} de la matriz se llama un **punto de silla**.
Tal es el elemento a_{22} en el siguiente juego

	t_1	t_2	Min de filas
s_1	12	-8	-8
s_2	10	4	**4**
Max de columnas	12	**4**	

El par de estrategias (s_2,t_2) está en equilibrio y la solución del juego es (s_2,t_2).

En general puede demostrarse el siguiente resultado:

<u>Teorema</u>
Dado un juego de suma cero con matriz de pagos A. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- El juego tiene solución (existe un par de estrategias de equilibrio) y la matriz de pagos A tiene un punto de silla.
- $u_1 = u_2$

Se llama **valor del juego** a la cantidad $u_1 = u_2$ que es la cuantía que ganará el jugador I y que perderá el jugador II al jugar este juego de forma racional.

Ejercicios
Dados los siguientes juegos estudiar si tienen un punto de silla. En caso afirmativo hallar su valor y sus parejas de equilibrio. Para aquellos juegos con punto de silla, estudiar si es posible resolverlos por eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 10 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 8 & 10 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Cuando el juego no tiene punto de silla u_1=max min a_{ij} < u_2=min max a_{ij}
En tal caso el juego se llama no determinado estrictamente

Ejemplo

	t_1	t_2	t_3	Min de filas
s_1	6	-2	3	**-2 maximin**
s_2	-4	5	4	-4
Max de columnas	6	5	**4 minimax**	

Como u_1=max min a_{ij} =-2 < u_2=min max a_{ij} =4 , el par (s_1,t_3) no es de equilibrio.
Los jugadores ya no tendrán interés en usar las estrategias mínimax y maximin: El jugador I selecciona s_1, para garantizarse un pago de –2 esperando que II seleccione t_2. Mientras tanto el jugador II seleccionará t_3 esperando que I seleccione s_2 con un pago 4.
El resultado es a_{13}=3 que ningún jugador esperaba.

Obsérvese que el par (s_1,t_3) no esta en equilibrio: si I juega s_1 II no jugará t_3 sino t_2. Si II juega t_3 I mejora su posición jugando s_2 en lugar de jugar s_1.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS JUEGOS CON ESTRATEGIAS DE EQUILIBRIO
(Luce y Raiffa)

1) No todo juego de suma cero tiene un par de equilibrio.

2) El par de estrategias de equilibrio no es necesariamente único. Por ejemplo

	t_1	t_2	t_3	Min de filas
s_1	4	5	4	**4 maximin**
s_2	3	0	1	1
Max de columnas	**4 minimax**	5	**4 minimax**	

Los pares (s_1,t_1) y (s_1,t_3) son pares de equilibrio y, por ello, soluciones del juego.

3) La existencia de varios pares de equilibrio en un juego de suma cero no crea ningún tipo de conflicto entre los intereses de los jugadores.

Ejercicio:
Sea un juego de suma cero de matriz $A=(a_{ij})$. Demostrar que si (s_i,t_j) y (s_h,t_k) son parejas de equilibrio, entonces (s_i,t_k) y (s_h,t_j) son también pares de equilibrio. Demostrar también que $a_{ij}=a_{ik}=a_{hj}=a_{hk.}$

4) Las estrategias de equilibrio maximizan el nivel de seguridad de los jugadores para cualquier otra estrategia, es decir, el nivel de seguridad de cualquier estrategia es inferior al nivel de seguridad de una estrategia de equilibrio (demostrarlo como ejercicio).

EJERCICIOS:

1) Decir si las siguientes matrices de pagos tienen un punto de silla. En caso afirmativo, decir cuál es la solución y determinar el valor del correspondiente juego.

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 10 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 8 & 10 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 & -4 & 9 \\ 5 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 6 & -8 & 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) Para cada una de las siguientes matrices de pagos, determinar el conjunto de valores de x para los que el juego tiene un punto de silla y para los valores de x en dicho conjunto determinar el punto de silla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 1 \\ 3 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & x \end{pmatrix}.$$

3) Supongamos que una matriz tiene dos puntos de silla. Demostrar que ambos tienen el mismo valor numérico, de modo que el valor de cualquier juego de suma cero con un punto de silla es único.

4)¿Por qué se emplea la acepción “punto de silla” para describir un punto de una matriz que es a la vez un mínimo de filas y un máximo de columnas?.

5) Supongamos que los elementos a_{ij} y a_{hk} son puntos de silla de una matriz. ¿Qué podríamos decir sobre los elementos a_{ik} y a_{hj} ?.

6) Demostrar que si en un juego de suma cero el par de estrategias (s_h, s_k) es de equilibrio, entonces el elemento a_{hk} es un punto de silla y viceversa.

7) Encontrar el valor de las estrategias óptimas para el juego de suma cero de dos jugadores

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

Demostrar que si el jugador I se desvía de su estrategia óptima, entonces el jugador II puede asegurar que el jugador I tiene un pago esperado que es menor que el valor 1/3 del juego.
Demostrar que si el jugador II se desvía de su estrategia óptima, entonces el jugador I puede asegurar que el jugador I tiene un pago esperado que es mayor que el valor 1/3 del juego (Winston, 1991).

8) Dos firmas competitivas deben determinar simultáneamente la cantidad que producen de un determinado producto. El beneficio total ganado por las dos firmas es siempre 1000 ε (euros). Si tanto el nivel de producción de la firma I como de la II son bajos, la firma I tiene un beneficio de 500 ε; si el nivel de I es bajo y el de II es alto, el beneficio de I es de 400 ε Si el nivel de ambas firmas es alto el beneficio de I es de 600 ε; finalmente, si el nivel de I es alto y el de II es bajo, los beneficios de I son sólo de 300 ε.
Encontrar el valor del juego y las estrategias óptimas para este juego de suma constante.
Transformar este juego en un juego de suma cero (Winston, 1991).

9) Demostrar, para cualquier matriz A, que $\max i \min(-A^t) = -\min i \max(A)$ (Binmore, 1996). (*).

ESTRATEGIAS MIXTAS

Cuando el juego no tiene punto de silla las estrategias maximin y minimax no son de equilibrio. En tal caso es todavía posible hablar de solución si ampliamos los conjuntos de estrategias de los jugadores permitiéndoles emplear estrategias mixtas, de modo que cada jugador elige su estrategia aleatoriamente según un vector de probabilidades.
Una **estrategia mixta** para el jugador I es un vector $X=(x_1,x_2,....,x_m)$ de números reales no negativos que verifican $x_1+x_2+....+x_m=1$, que se interpreta considerando que el jugador I juega la estrategia s_i con probabilidad x_i.
De modo similar hablaremos de una estrategia mixta para II como un vector de probabilidad $Y=(y_1,y_2,....,y_n)$.
Las estrategias que se consideraron inicialmente se les denomina **estrategias puras** y corresponden a vectores de probabilidad de la forma (0,0.....,1,....0,0).

Consideremos un juego de suma cero donde el jugador I cuenta con un conjunto de estrategias puras $s_1,s_2,....,s_m$ mientras que II cuenta con las estrategias puras $t_1,t_2,....,t_n$, de modo que la matriz de pagos del juego es $A=(a_{ij})$.
Dadas un par de estrategias mixtas $X=(x_1,x_2,....,x_m)$ y $Y=(y_1,y_2,....,y_n)$ para cada jugador, **el resultado a_{ij} del juego ocurre con probabilidad x_i y_j,**
Es decir $P(s_i,t_j)=x_i y_j$

Se llama **pago esperado** del juego del juego $A=(a_{ij})$ en la que I usa la estrategia mixta $X=(x_1,x_2,....,x_m)$ y II la $Y=(y_1,y_2,....,y_n)$ a la esperanza matemática de las a_{ij}:

Pago esperado = $\sum_{ij} x_i y_j a_{ij} = \sum_i \sum_j x_i a_{ij} y_j = XAY^t$,
Es decir

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & .... & x_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n}\\ ... & ... & ..... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ ...\\ y_n\end{pmatrix}$$

Por ejemplo, dado el juego $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, el valor esperado de dicho juego cuando I juega la estrategia mixta $(2/3\,,1/3)$ y II juega la estrategia (1/2,1/2) será:

$$\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\end{pmatrix}=2$$

Consideremos las estrategias maximin y minimax del juego anterior:

	t_1	t_2	Min filas
s_1	1	3	**1**
s_2	4	0	0
Max de columnas	4	**3**	

Por tanto $u_1 = 1$ mientras que $u_2 = 3$.

Para el jugador I cualquier resultado que sea superior a $u_1 = 1$ será interesante pues supera su mínima ganancia garantizada. Para el jugador II cualquier resultado que sea inferior a $u_2 = 3$ será interesante pues hará disminuir su máxima pérdida esperada.
No obstante, **mediante el uso de estrategias mixtas ambos jugadores pueden mejorar sus niveles de seguridad** en estrategias puras, tal como muestra el siguiente ejemplo:

Por ejemplo, si I usa (2/3,1/3), independientemente de la respuesta de II obtendrá un pago promedio superior a $u_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2(y_1 + y_2) = 2 > u_1 = 1$$

Si II juega, por ejemplo, (1/2,1/2), independiente de la respuesta de I obtendrá una pérdida promedio inferior a $u_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2(x_1 + x_2) = 2 < u_2 = 3$$

Por tanto, el jugador I usando la estrategia maximin siempre puede asegurarse el pago de una cantidad $u_1 = \max_i \min_j (a_{ij})$; no obstante u_1 no será necesariamente su nivel de seguridad cuando la matriz no tiene un punto de silla. Análogamente, el jugador II usando la estrategia minimax siempre puede asegurarse una pérdida no superior a $u_2 = \min_j \max_i (a_{ij})$; no obstante u_2 no será necesariamente su nivel de seguridad cuando la matriz no tiene un punto de silla. Ambos jugadores podrían incrementar su seguridad mediante el uso de estrategias mixtas.

La introducción de estrategias mixtas conduce, por tanto, a un replanteamiento del nivel de seguridad.

Se llama **nivel de seguridad de una estrategia mixta X_1 de I** a la cantidad $\underset{Y \in T}{Min}\ X_1 A Y^t$, que es el peor pago posible esperado (**mínima ganancia esperada**) por I al jugar dicha estrategia X_1, dejando que el jugador II responda con cualquier estrategia mixta $Y \in T$, donde T es el conjunto de estrategias mixtas (vectores de probabilidad) del jugador II. El jugador II averigua, así, su pago esperado en la peor situación.

Ejemplo:
El nivel de seguridad de la estrategia $X_1 = (1/3, 2/3)$ del jugador I será

$$\underset{Y \in T}{Min}\ X_1 A Y^t = \underset{(y_1, y_2) \in T}{Min} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underset{(y_1, y_2) \in T}{Min} \{3y_1 + y_2\} =$$
$$\underset{0 \le y_1 \le 1}{Min} \{3y_1 + 1 - y_1\} = \underset{0 \le y_1 \le 1}{Min} \{2y_1 + 1\} = 1$$

Se llama **nivel de seguridad de una estrategia mixta Y_1 de II** a la cantidad $\underset{X \in S}{Max}\ X A Y_1^t$, que es la **máxima pérdida esperada** por II al jugar dicha estrategia Y_1, dejando que el jugador I responda con cualquier estrategia mixta $X \in S$, donde S es el conjunto de estrategias mixtas (vectores de probabilidad) del jugador I.

Ejercicio:
Hallar el nivel de seguridad de la estrategia mixta $Y_1 = (1/3, 2/3)$ del jugador II.

Veamos que el nivel de seguridad de un jugador pueden computarse sin más que emplear las estrategias puras de su contrario. Para ello es preciso introducir alguna notación adicional: Dada una matriz A su columna j-ésima será denotada como $A^{(j)}$, mientras que la fila i-ésima se denotará como $A_{(i)}$.

<u>Teorema</u>
Para una estrategia fija X_1 del jugador I se tiene:

$$\underset{Y \in T}{Min}\ X_1 A Y^t = \underset{1 \le j \le n}{Min}\left\{X_1 A^{(j)}\right\} = \underset{Y \in Puras}{Min}\left\{X_1 A Y^t_{puras}\right\}.$$

Es decir, si I desea determinar el nivel de seguridad para la estrategia X_1 , no necesita considerar el conjunto de todas los posibles resultados $X_1 A Y^t$ para $Y \in T$, sino sólo aquellos resultados correspondientes al uso de estrategias puras por parte de II.

De forma similar, para una estrategia fija Y_1 del jugador II se tiene:

$$\underset{X \in S}{Max}\ X A Y_1^t = \underset{1 \le i \le m}{Max}\left\{A_{(i)} Y_1^t\right\} = \underset{X \in Puras}{Max}\left\{X_{puras} A Y_1^t\right\}.$$

Demostración:
Se realizará una sencilla demostración con el fin de no complicar la notación hallando el nivel de seguridad de la estrategia $X_1 = (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2)$ del jugador I:

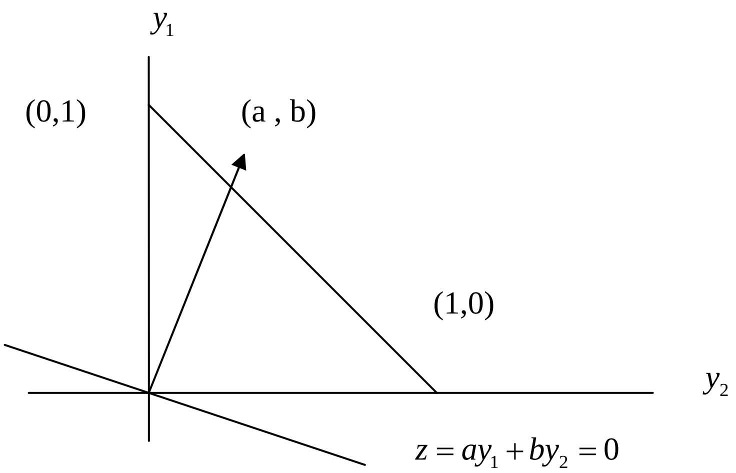
$$\underset{Y \in T}{Min}(\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underset{Y \in T}{Min}\ (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} y_1 + (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2)\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} y_2 = \underset{Y \in T}{Min}\ a y_1 + b y_2$$

donde $a = (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $b = (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2)\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$.

entonces a resolver el problema de programación lineal

$$\underset{Y \in T}{Min}\ z = a y_1 + b y_2$$
$$s.a.\ y_1 + y_2 = 1$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0$$

Como puede comprobarse gráficamente:
Para $b < a$ el mínimo se toma en (0,1) tomando el valor z(0,1)=b.
Para $a < b$ el mínimo se toma en (1,0) tomando el valor z(1,0)=a.
Luego el mínimo del problema se toma en el $Min\{a, b\}$.



Ejemplo:

Consideremos el juego $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Hallemos el nivel de seguridad de la estrategia $X_1 = (1/2\, 1/2)$:

$$\underset{Y \in T}{Min}(1/2 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Min\left\{(1/2 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (1/2 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$Min\left\{(1/2 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, (1/2 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = Min\{5/2 \quad 3/2\} = 3/2$$

Hallemos el nivel de seguridad de la estrategia $Y_1 = (1/2\, 1/2)$:

$$\underset{X \in S}{Max}(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = Max\left\{(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$Max\left\{(1 \quad 3)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, (4 \quad 0)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\} = Max\{2,2\} = 2\,.$$

Ejercicio:

Hallar los niveles de seguridad de las estrategias $X_1 = (1/3 \quad 2/3)$ y $Y_1 = (1/3 \quad 2/3)$.

NIVELES DE SEGURIDAD OPTIMOS

Los jugadores buscarán estrategias mixtas que maximicen sus niveles de seguridad, es decir, buscarán niveles de seguridad óptimos:

El nivel de seguridad del jugador I se obtienen cuando éste juega aquella estrategia donde su nivel de seguridad sea óptimo. El jugador I resolverá el problema de optimización

$$\underset{X \in S}{Max}\{nivel\ de\ seguridad\ de\ X\} = \underset{X \in S}{Max}\ \underset{Y \in T}{Min}\ XAY^t = \underset{X \in S}{Max}\ \underset{Y \in Puras}{Min}\ XAY^t_{Puras} = v_1$$

Observar que $\underset{Y \in T}{Min}\ XAY^t$ es sólo función de X .

El nivel de seguridad del jugador II se obtienen cuando éste juega aquella estrategia donde su nivel de seguridad sea óptimo. El jugador II resolverá el problema de optimización

$$\underset{Y \in T}{Min}\{nivel\ de\ seguridad\ de\ Y\} = \underset{Y \in T}{Min}\ \underset{X \in S}{Max}\ XAY^t = \underset{Y \in T}{Min}\ \underset{X \in Puras}{Max}\ X_{Puras}AY^t = v_2$$

Observar que $\underset{X \in S}{Max}\ XAY^t$ es sólo función de Y .

PAREJAS DE ESTRATEGIAS MIXTAS EN EQUILIBRIO

Dadas dos estrategias mixtas X_1 e Y_1 de un juego de suma cero para dos jugadores, se dice que son de equilibrio cuando cada jugador no tiene incentivo para cambiar de estrategia si el otro no la cambia.
Dicho de otra forma, **si un jugador elige una estrategia mixta del par de equilibrio, el otro no puede hacer otra cosa mejor que elegir la otra estrategia mixta del par de equilibrio.**

El que dos estrategias mixtas (X_1, Y_1) sean de equilibrio puede expresarse por medio de las siguientes desigualdades

$$XAY_1^t \le X_1AY_1^t \le X_1AY^t \quad \forall X \in S \ , \ \forall Y \in T \ ,$$

que expresa la no conveniencia de cambio de estrategias por ambos jugadores si su contrario no cambia de estrategia. Así, $XAY_1^t \le X_1AY_1^t \quad \forall X \in S$ indica que si II elige Y_1, I no tiene mejor opción que elegir X_1.
Mientras, $X_1AY_1^t \le X_1AY^t \quad \forall Y \in T$ indica que si I elige X_1, II no tiene mejor opción que elegir Y_1.
El concepto de pareja de equilibrio (X_1, Y_1) en estrategias mixtas tiene un significado muy similar que el de punto de silla si interpretamos la estrategia X como fila y la estrategia Y como columna. En este caso la primera desigualdad puede interpretarse como “mínimo de filas” y la segunda como “máximo de columnas”. Recuérdese que en un punto de silla se verifica $a_{i\, j_1} \le a_{i_1\, j_1} \le a_{i_1\, j} \quad \forall i \ , \forall j$.

<u>**Teorema fundamental**</u> (Von Neumann (1928))

Sea un juego de suma cero con dos jugadores y matriz de pagos A. En tal caso se verifica:
a) Existe una estrategia mixta $\bar{X}$ de I que tiene nivel de seguridad óptimo y por tanto maximiza $\underset{Y \in T}{Min}\ XAY^t$, es decir

$$v_1 = \underset{X \in S}{Max}\ \underset{Y \in T}{Min}\ XAY^t = \underset{Y \in T}{Min}\ \bar{X}AY^t$$

Tal estrategia $\bar{X}$ puede considerarse como la estrategia maximin mixta de I.

b) Existe una estrategia mixta $\bar{Y}$ de II tiene nivel de seguridad óptimo y por tanto minimiza $\underset{X \in S}{Max}\ XAY^t$, es decir,

$$v_2 = \underset{Y \in T}{Min}\ \underset{X \in S}{Max}\ XAY^t = \underset{X}{Max}\ XA\bar{Y}^t \ .$$

Tal estrategia $\bar{Y}$ puede considerarse como la estrategia minimax mixta de II.

c) Las estrategias mixtas maximin y minimax $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ son de equilibrio y se verifica que $v_1 = v_2 = \bar{X}A\bar{Y}^t$

Demostración: Ver Binmore (1996), página 231.

Este teorema demuestra que todo juego de suma cero tiene solución en estrategias mixtas. La solución del juego es, por definición, la pareja de estrategias mixtas de equilibrio $(\bar{X}, \bar{Y})$, junto con el valor del juego $v_1 = v_2 = \bar{X}A\bar{Y}^t$.

<u>Corolario 1</u>
El nivel de seguridad de cualquier estrategia X_1 de I es menor o igual que el de cualquier estrategia Y_1 de II, es decir

$$\underset{Y \in T}{Min}\ X_1AY^t \le \underset{X \in S}{Max}\ XAY_1^t$$

Dem.

$$\underset{Y \in T}{Min}\ X_1AY^t \le \underset{X \in S}{Max}\ \underset{Y \in T}{Min}\ XAY^t = \underset{Y \in T}{Min}\ \underset{X \in S}{Max}\ XAY^t \le \underset{X \in S}{Max}\ XAY_1^t$$

Corolario 2

Si dos estrategias X_1 de I y Y_1 de II tienen el mismo nivel de seguridad, es decir $\underset{Y\in T}{Min}\, X_1AY^t = \underset{X\in S}{Max}\, XAY_1^t$ entonces son de equilibrio.

Consideremos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\underset{Y\in T}{Min}\, X_1AY^t \le \underset{Y\in T}{Min}\, \overline{X}AY^t = \underset{X\in S}{Max}\,\underset{Y\in T}{Min}\, XAY^t = \underset{Y\in T}{Min}\,\underset{X\in S}{Max}\, XAY^t$$

$$= \underset{X\in S}{Max}\, XA\overline{Y}^t \le \underset{X\in S}{Max}\, XAY_1^t$$

Si se produce la igualdad entre los niveles de seguridad de X_1 e Y_1, $\underset{Y\in T}{Min}\, X_1AY^t = \underset{X\in S}{Max}\, XAY_1^t$, la cadena de desigualdades anteriores se convertirá en una cadena de igualdades y los óptimos se tomarán en X_1 e Y_1, es decir $\overline{X}A\overline{Y}^t = X_1AY_1^t$. En tal caso, para cualquier otro par de estrategias X e Y se verificará

$$XAY_1^t \le X_1AY_1^t \le X_1AY^t \quad \forall X \in S \;,\; \forall Y \in T$$

con lo que X_1 e Y_1 serían las estrategias de equilibrio.

Ejercicio:

Dado el juego $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, probar que el par de estrategias $X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $Y_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ son un par de estrategias de equilibrio y hallar el valor del juego demostrando que es cero.

Sabemos que $\underset{Y\in T}{Min}\, X_1AY^t \le \underset{X\in S}{Max}\, XAY_1^t$ y que cuando se produce la igualdad las estrategias X_1 e Y_1 tienen el mismo nivel de seguridad y entonces son de equilibrio.

Hallemos el nivel de seguridad de la estrategia X_1.

$$\underset{Y\in T}{Min}\, X_1AY^t = \underset{Y\in T}{Min}\left\{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$Min\left\{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = 0$$

El nivel de seguridad de la estrategia Y_1.

$$\underset{X\in S}{Max}\, XAY_1^t = \underset{X\in S}{Max}\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$Max\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\} = 0$$

Comprobar, en cambio, que la pareja de estrategias $X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $Y_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ no forman una pareja de equilibrio. Hallar para ello sus niveles de seguridad.

Ejercicio.

Dado el juego $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, demostrar que las estrategias $X_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ y $Y_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ son de equilibrio.

Demostrar que las estrategias $X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $Y_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ no son de equilibrio.

SOLUCION DE JUEGOS DE SUMA CERO EN ESTRATEGIAS MIXTAS

La solución de un juego de suma cero con dos jugadores consiste en una pareja estrategias mixtas $(\overline{X},\overline{Y})$ de estrategias mixtas de equilibrio, junto con el valor del juego $v_1 = v_2 = \overline{X}A\overline{Y}^t$.

En esta sección se plantea el problema de cómo encontrar el par de estrategias mixtas de equilibrio $(\overline{X},\overline{Y})$ en un juego de suma cero de dos jugadores, donde cada uno tiene dos estrategias.
Existen varios métodos que se muestran a continuación.

Método gráfico

Sólo es aplicable en juegos donde cada jugador cuenta con dos estrategias.

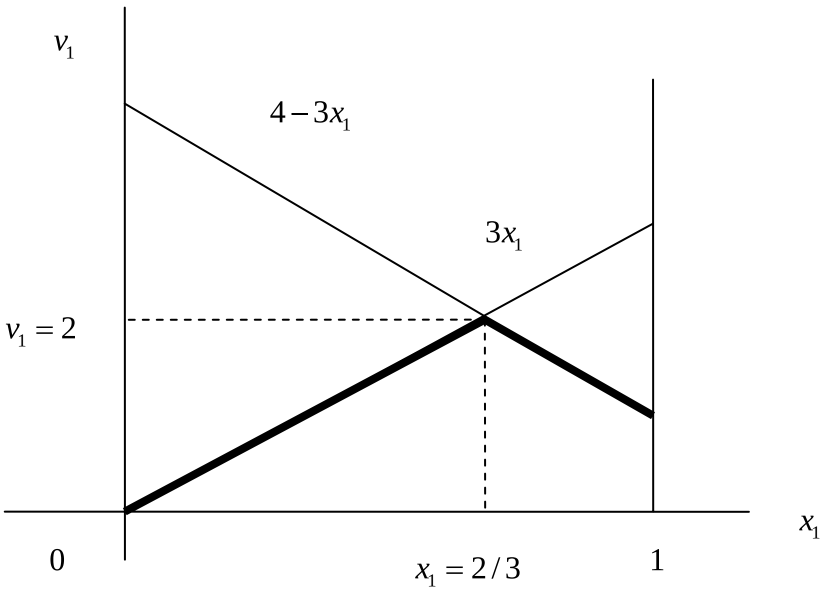
Consideremos el juego $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Si miramos el juego desde el punto de vista del jugador I

$$v_1 = \underset{X \in S}{Max}\ \underset{Y \in T}{Min}\ XAY^t = \underset{X \in S}{Max}\ \underset{Y \in Puras}{Min}\ XAY^t_{Puras} = \underset{(x_1,x_2)\in S}{Max}\ Min\left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\underset{(x_1,x_2)\in S}{Max}\ Min\{x_1 + 4x_2\ ,\ 3x_1\} = \underset{0 \le x_1 \le 1}{Max}\ Min\{4 - 3x_1\ ,\ 3x_1\}$$

Representando esta expresión gráficamente puede observarse que $v_1 = 2$ y que una estrategia mixta para el jugador I con nivel de seguridad $v_1 = 2$ es la $\overline{X} = (2/3,1/3)$.

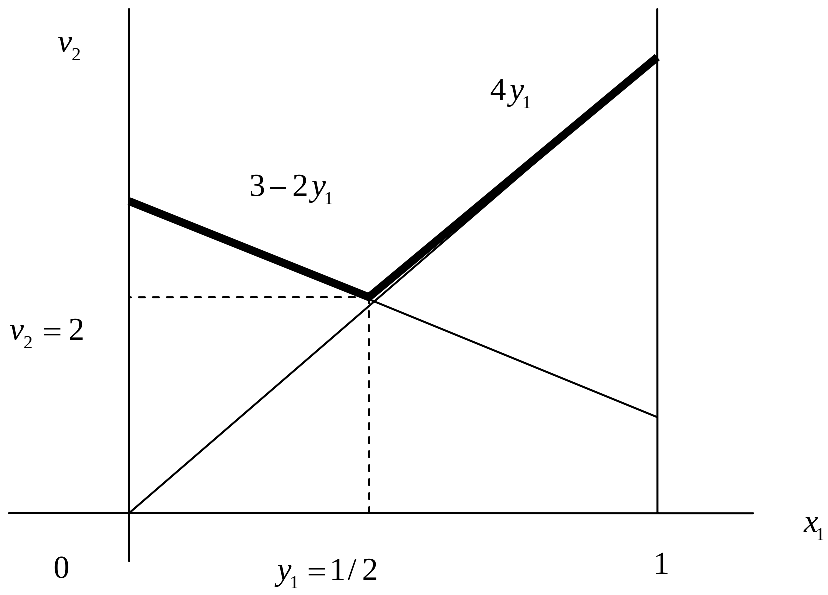


Si miramos el juego desde el punto de vista del jugador II, éste buscará su nivel de seguridad óptimo

$$v_2 = \underset{Y \in T}{Min}\ \underset{X \in S}{Max}\ XAY^t = \underset{Y \in T}{Min}\ \underset{X \in Puras}{Max}\ X_{Puras}AY^t = \underset{(y_1,y_2)\in T}{Min}\ Max\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\underset{(y_1,y_2)\in T}{Min}\ Max\{y_1 + 3y_2\ ,\ 4y_1\} = \underset{0 \le y_1 \le 1}{Min}\ Max\{3 - 2y_1\ ,\ 4y_1\}$$

Representando esta expresión gráficamente puede observarse que $v_2 = 2$ y que una estrategia mixta para el jugador II con nivel de seguridad $v_2 = 2$ es la $\overline{Y} = (1/2,1/2)$.



Obsérvese que $\overline{X}A\overline{Y}^t = (2/3,1/3)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = v_1 = v_2 = 2$

La estrategia $\overline{X} = (2/3,1/3)$ con nivel de seguridad $v_1 = 2$ se llama estrategia óptima de I. La estrategia $\overline{Y} = (1/2,1/2)$ con nivel de seguridad $v_2 = 2$ se llama estrategia óptima de II. El valor del juego es $v_1 = v_2 = 2$.

La solución del juego es el par de estrategias $(\overline{X},\overline{Y})$ junto con el valor $v_1 = v_2 = \overline{X}A\overline{Y}^t = 2$.

Resolución de un juego igualando el valor esperado de las estrategias.

Este procedimiento es más general que el método gráfico. Consiste en obtener las estrategias mixtas óptimas de cada jugador igualando los valores esperados de sus diferentes estrategias puras. Este principio se basa en la racionalidad de los jugadores: de no producirse la igualdad entre los valores esperados de las diferentes estrategias los jugadores desecharían las estrategias que estuviesen dominadas por otras. Por tanto, para aplicar este principio de resolución de juegos es preciso proceder previamente a la eliminación iterativa de todas las estrategias estrictamente dominadas que sea posible.

Este procedimiento de resolución de un juego en estrategias mixtas tiene la limitación de que solo es aplicable cuando ambos jugadores disponen del mismo número de estrategias.

		y_1 t_1	y_2 t_2	Min filas
x_1	s_1	1	3	**1**
x_2	s_2	4	0	0
	Max columnas	4	**3**	

Calculemos el valor esperado para el jugador I de las estrategias s_1 y s_2:

$$VE_1(s_1) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1 + 3y_2 = y_1 + 3(1-y_1) = -2y_1 + 3$$

$$VE_1(s_2) = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 4y_1$$

Pero $VE_1(s_1) = VE_1(s_2)$, pues de lo contrario el jugador I desecharía la estrategia cuyo valor esperado fuese menor. Por tanto
$-2y_1 + 3 = 4y_1$, de donde $\bar{y}_1 = 1/2$, e $\bar{y}_2 = 1 - \bar{y}_1 = 1 - 1/2 = 1/2$.

El mismo proceso ha de repetirse para el jugador II. El valor esperado de sus estrategias t_1 y t_2 será:

$$VE_2(t_1) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 + 4x_2 = x_1 + 4(1 - x_1) = -3x_1 + 4$$

$$VE_2(t_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3x_1$$

Pero $VE_2(t_1) = VE_2(t_2)$. Por tanto
$-3x_1 + 4 = 3x_1$, de donde $\bar{x}_1 = 2/3$, e $\bar{x}_2 = 1 - \bar{x}_1 = 1/3$.

Obsérvese que el valor del juego es

$$\bar{X}A\bar{Y}^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = v_1 = v_2 = 2$$

Ejercicio:
Mediante el procedimiento de igualar el valor esperado de estrategias resolver los juegos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Resolución de un juego mediante programación lineal

Este procedimiento es absolutamente general y permite resolver cualquier juego de suma cero con dos jugadores transformándolo en un problema de programación lineal. Consideremos, en primer lugar el caso en que todos los elementos de la matriz de pagos A sean positivos.

Sea el juego $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Desde el punto de vista del jugador I tendremos

$$v_1 = \underset{X \in S}{Max} \underset{Y \in T}{Min}\ XAY^t = \underset{X \in S}{Max} \underset{Y \in Puras}{Min}\ XAY^t_{Puras} = \underset{(x_1, x_2) \in S}{Max} Min \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\underset{(x_1, x_2) \in S}{Max} Min \{ x_1 + 4x_2 \ , 3x_1 + x_2 \}$$

el jugador I buscará una estrategia (x_1, x_2) cuya mínima ganancia garantizada $Min\{x_1 + 4x_2 \ , 3x_1 + x_2\}$ sea máxima.
Para ello introduciremos una nueva variable $w = Min\{x_1 + 4x_2 \ , 3x_1 + x_2 \ tal\ que\ x_1 + x_2 = 1\}$, resulta entonces que:
$x_1 + 4x_2 \geq w$, $3x_1 + x_2 \geq w$, $x_1 + x_2 = 1$.
Obsérvese que como los elementos de la matriz del juego A son mayores que cero y como $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, podemos asegura que la variable $w > 0$. Si la matriz A tuviese algún elemento negativo o nulo sería preciso algún tipo de razonamiento adicional, que veremos más adelante, para garantizar un $w > 0$.
Calcular v_1 es equivalente a obtener aquel valor mínimo de w verificando el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &Max\ w \\ &s.a.\ x_1 + 4x_2 \geq w \\ &\qquad 3x_1 + x_2 \geq w \\ &\qquad x_1 + x_2 = 1 \\ &\qquad x_1\ ,\ x_2, w \geq 0 \end{aligned}$$

O, de forma equivalente

$$\begin{aligned} &Max\ w \\ &s.a. \frac{x_1}{w} + 4\frac{x_2}{w} \geq 1 \\ &\qquad 3\frac{x_1}{w} + \frac{x_2}{w} \geq 1 \\ &\qquad \frac{x_1}{w} + \frac{x_2}{w} = \frac{1}{w} \\ &\qquad x_1\ ,\ x_2, w \geq 0 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x_i´ = \frac{x_i}{w}$, resulta el programa

$$\begin{aligned} &Max\ w \\ &s.a.\ x_1´ + 4x_2´ \geq 1 \\ &\qquad 3x_1´ + x_2´ \geq 1 \\ &\qquad x_1´ + x_2´ = \frac{1}{w} \\ &\qquad x_1´\ ,\ x_2´ \geq 0 \end{aligned}$$

O lo que es igual

$$\begin{aligned} &Min\ \ \frac{1}{w} = x_1´ + x_2´ \\ &s.a.\ x_1´ + 4x_2´ \geq 1 \qquad (*) \\ &\qquad 3x_1´ + x_2´ \geq 1 \\ &\qquad x_1´\ ,\ x_2´ \geq 0 \end{aligned}$$

Si el óptimo de este programa se toma en $\overline{x}_1´\ ,\ \overline{x}_2´$, entonces $v_1 = \overline{w} = \frac{1}{\overline{x}_1´ + \overline{x}_2´}$, de donde $\overline{x}_1 = \overline{w}\ \overline{x}_1´$ y $\overline{x}_2 = \overline{w}\ \overline{x}_2´$, lo que permite encontrar las estrategias óptimas del jugador I y el valor del juego.

Desde el punto de vista del jugador II se tendrá:

$$v_2 = \underset{Y \in T}{Min}\ \underset{X \in S}{Max}\ XAY^t = \underset{Y \in T}{Min}\ \underset{X \in Puras}{Max}\ X_{Puras} AY^t = \underset{(y_1, y_2) \in T}{Min}\ Max \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\underset{(y_1, y_2) \in S}{Min}\ Max \{ y_1 + 3y_2\ ,\ 4y_1 + y_2 \}$$

el jugador II buscará una estrategia (y_1, y_2) cuya máxima pérdida esperada $Max\{y_1 + 3y_2\ ,\ 4y_1 + y_2\}$.

Para ello introduciremos la nueva variable $w = Max\{ y_1 + 3y_2\ ,\ 4y_1 + y_2\ tal\ que\ y_1 + y_2 = 1\} > 0$, por lo que se tiene

$y_1 + 3y_2 \leq w$, $4y_1 + y_2 \leq w$, $y_1 + y_2 = 1$.

Obsérvese que como los elementos de la matriz del juego A son mayores que cero e $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ tendremos que $w > 0$. Si la matriz A tuviese algún elemento negativo o nulo sería preciso algún tipo de razonamiento adicional, que veremos más adelante.

Calcular v_2 es equivalente a obtener aquel valor mínimo de w verificando el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &Min\ w \\ &s.a.\ y_1 + 3y_2 \leq w \\ &\qquad 4y_1 + y_2 \leq w \\ &\qquad y_1 + y_2 = 1 \\ &\qquad y_1\ ,\ y_2, w \geq 0 \end{aligned}$$

O, de forma equivalente

$$\begin{aligned} &Min\ w \\ &s.a. \frac{y_1}{w} + 3\frac{y_2}{w} \leq 1 \\ &\qquad 4\frac{y_1}{w} + \frac{y_2}{w} \leq 1 \\ &\qquad \frac{y_1}{w} + \frac{y_2}{w} = \frac{1}{w} \\ &\qquad y_1\ ,\ y_2, w \geq 0 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $y_i' = \frac{y_i}{w}$, resulta el programa

$$\begin{aligned} & Min\ w \\ & s.a.\ y_1' + 3y_2' \leq 1 \\ & \quad 4y_1' + y_2' \leq 1 \\ & \quad y_1' + y_2' = \frac{1}{w} \\ & \quad y_1',\ y_2' \geq 0 \end{aligned}$$

O lo que es igual

$$\begin{aligned} & Max\ \frac{1}{w} = y_1' + y_2' \\ & s.a.\ y_1' + 3y_2' \leq 1 \\ & \quad 4y_1' + y_2' \leq 1 \\ & \quad y_1',\ y_2' \geq 0 \end{aligned} \qquad (**)$$

Si el óptimo de este programa se toma en $\bar{y}_1',\ \bar{y}_2'$, entonces $v_2 = \bar{w} = \frac{1}{\bar{y}_1' + \bar{y}_2'}$, de donde $\bar{y}_1 = \bar{w}\,\bar{y}_1'$ y $\bar{y}_2 = \bar{w}\,\bar{y}_2'$, lo que permite encontrar las estrategias óptimas del jugador II y el valor del juego.

Obsérvese que los problemas (*) y (**) son duales el uno del otro lo que conduce a una demostración del teorema de Von Neumann por medio del teorema fundamental de la dualidad.

Por simplicidad vamos a resolver el problema dual

		C	1	1	0	0
C_B	B	b	Y_1'	Y_2'	Y_3'	Y_4'
0	Y_3'	1	1	3	1	0
0	Y_4'	1	4	1	0	1
		0	0	0	0	0
			-1	-1	0	0

La tabla óptima resulta ser

		C	1	1	0	0
C_B	B	b	$Y_1´$	$Y_2´$	$Y_3´$	$Y_4´$
1	$Y_2´$	33/25	0	1		
1	$Y_1´$	22/25	1	0		
		11/5	0	0	0	0
			0	0	33/25	22/25

De donde obtenemos que $(\overline{x}_1´ , \overline{x}_2´) = (33/25, 22/25)$ y que $(\overline{y}_1´ , \overline{y}_2´) = (22/25, 33/25)$.

La estrategia óptima para el jugador II $(\overline{y}_1 , \overline{y}_2)$ se obtendrá de la forma:

$$v_2 = \frac{1}{Max(y_1´ + y_2´)} = \frac{1}{11/5} = \frac{5}{11}$$
$$\overline{y}_1 = \overline{y}_1´ v_2 = 22/25 \cdot 5/11 = 2/5$$
$$\overline{y}_2 = \overline{y}_2´ v_2 = 33/25 \cdot 5/11 = 3/5,$$

Con lo que la estrategia óptima del jugador II será $(\overline{y}_1 , \overline{y}_2) = (2/5, 3/5)$ y el valor del juego $v_1 = v_2 = 5/11$.

De forma análoga, la estrategia óptima para el jugador I $(\overline{x}_1 , \overline{x}_2)$ se obtendrá de la forma:

$$v_1 = \frac{1}{Max(x_1´ + x_2´)} = \frac{1}{1/2} = 2$$
$$\overline{x}_1 = \overline{x}_1´ v_1 = 33/25 \cdot 5/11 = 3/5$$
$$\overline{x}_2 = \overline{x}_2´ v_1 = 22/25 \cdot 5/11 = 2/5,$$

Con lo que la estrategia óptima del jugador I será $(\overline{x}_1 , \overline{x}_2) = (3/5, 2/5)$.

Si la matriz de pagos del juego A tiene algún elemento negativo o nulo hay dos posibilidades para transformar el juego en un problema de programación lineal.
La primera posibilidad es considerar un problema de PL donde la variable w no está restringida y no tiene signo definido.
Siguiendo a Winston (1991), una segunda posibilidad es realizar la transformación del juego que sugiere la siguiente proposición.

<u>Proposición</u>
Consideremos un juego de suma cero con matriz de pagos $A = (a_{i,j})$. Si sumamos una constante c a cada uno de los elementos de la matriz A, obtenemos un nuevo juego de suma constante c cuya matriz de pagos será $A´ = (a_{i,j} + c)$ y cuyo par de equilibrio de estrategias óptimas $(\overline{X}, \overline{Y})$ serán las mismas que las del juego de suma cero A; en tal caso el valor del juego resultará incrementado en la cantidad c, es decir, $valor\ de\ (a_{i,j} + c) = valor\ de\ (a_{i,j}) + c$.

Demostración:
Como $(\overline{X}, \overline{Y})$ es un par de equilibrio del juego A se tendrá que , $\underset{Y \in T}{Min}\ \overline{X}AY^t = \underset{X \in S}{Max}\ XA\overline{Y}^t$. Será suficiente demostrar que $\underset{Y \in T}{Min}\ \overline{X}A´Y^t = \underset{X \in S}{Max}\ XA´\overline{Y}^t$.

Para ello compruébese, como ejercicio, que $XA´Y^t = XAY^t + c$, para cualquier par de estrategias X, Y de I y II, respectivamente. En tal caso

$$\left.\begin{array}{l} \underset{Y \in T}{Min}\ \overline{X}A´Y^t = \underset{Y \in T}{Min}\ \overline{X}AY^t + c \\ \underset{X \in S}{Max}\ XA´\overline{Y}^t = \underset{X \in S}{Max}\ XA\overline{Y}^t + c \end{array}\right\} luego\ \underset{Y \in T}{Min}\ \overline{X}A´Y^t = \underset{X \in S}{Max}\ XA´\overline{Y}^t$$

Por tanto, si sumamos al juego A la cantidad c obtendremos un nuevo juego de matriz de pagos A´ cuyos elementos son todos mayores o iguales a cero. A´ podrá resolverse mediante la programación lineal y sus estrategias mixtas óptimas coincidirán con las del juego A, mientras que su valor será igual al valor de A más la cantidad c.

Ejemplo:
Dado el juego de suma cero

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Convertirlo en un juego de suma constante sumando $c=|-1|=1$ a cada elemento de la matiz de pagos. Resolverlo medio de programa de programación lineal aplicando el método del simplex.

La nueva matriz de pagos será

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El jugador I deberá resolver el problema de PL, que ahora trataremos de forma ligeramente diferente que en el caso anterior:

$$\begin{aligned} &Max\ v' \\ &s.a.\ x_1+2x_2 \geq v' \\ &\qquad x_2+2x_3 \geq v' \\ &\qquad 2x_1+x_3 \geq v' \\ &\qquad x_1+x_2+x_3=1 \\ &\qquad x_1,\ x_2, x_3, v' \geq 0 \end{aligned}$$

. Sustituyendo $x_3=1-x_1-x_2$, se obtiene

$$\begin{aligned} &Max\ v' \\ &s.a.\ v'-x_1-2x_2 \leq 0 \\ &\qquad v'+2x_1+x_2 \leq 2 \\ &\qquad v'-x_1+x_2 \leq 1 \\ &\qquad x_1,\ x_2, v' \geq 0 \end{aligned}$$

.

El jugador II deberá resolver el problema de PL

$$\begin{aligned} &Min\ w' \\ &s.a.\ y_1+2y_3 \leq w' \\ &\qquad 2y_1+y_2 \leq w' \\ &\qquad 2y_2+y_3 \leq w' \\ &\qquad y_1+y_2+y_3=1 \\ &\qquad y_1,\ y_2, y_3, w' \geq 0 \end{aligned}$$

. Sustituyendo $y_3=1-y_1-y_2$, se obtiene

$$\begin{aligned} &Min\ w' \\ &s.a.\ w'+y_1+2y_2 \geq 2 \\ &\qquad w'-2y_1-y_2 \geq 0 \\ &\qquad w'+y_1-y_2 \geq 1 \\ &\qquad y_1,\ y_2, w' \geq 0 \end{aligned}$$

.

Resolviendo cualquiera de los dos problemas de PL se obtendrá que:
$v'=w'=1$
La estrategia óptima del jugador I será (1/3,1/3,1/3).
La estrategia óptima del jugador II será (1/3,1/3,1/3).

Por tanto en el juego original A ambos jugadores tendrán las mismas estrategias óptimas, pero $v=w=v'-1=w'-1=0$.

EJERCICIOS

1) Para el juego matricial A, donde

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\6&5&2&1\\7&0&1&8\end{pmatrix}$$

Calcular los niveles de seguridad de las estrategias mixtas $X_1=(1/3,1/3,1/3)$ y $X_2=(2/3,1/3,0)$ del jugador I. ¿Qué podemos concluir sobre el nivel de seguridad v_1 del jugador I?.

Calcular los niveles de seguridad de las estrategias mixtas $Y_1=(1/6,0,5/6,0)$ y $Y_2=(0,1/3,1/2,1/6)$ del jugador I. ¿Qué podemos concluir sobre el nivel de seguridad v_2 del jugador II?.

2) Para el juego matricial A, donde

$$A=\begin{pmatrix}0&0&3&1\\2&1&4&2\\1&3&0&0\end{pmatrix}$$

Calcular el nivel de seguridad de la estrategia mixta $X_1=(0,3/4,1/4)$ del jugador I.

Calcular el nivel de seguridad de la estrategia mixta $Y_1=(0,1/2,0,1/2)$ del jugador II.

¿Qué podemos concluir ?.

3) Para cada una de las siguientes matrices de pago de juegos de suma cero, probar afirmativa o negativamente, que el par de estrategias dadas es una solución del juego.

$A=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\3&-4&2\\-2&0&1\end{pmatrix}$, siendo $X_1=(2/5,1/5,2/5)$ y $Y_1=(1/4,1/4,1/4)$.

$A=\begin{pmatrix}2&-4&2&-1\\-9&-1&1&1\\-3&5&-2&0\end{pmatrix}$, siendo $X_1=(1/2,0,1/2)$ y $Y_1=(1/6,0,0,5/6)$.

$A=\begin{pmatrix}5&-2&4&7\\-3&1&-2&-5\\1&-4&8&3\end{pmatrix}$, siendo $X_1=(2/5,3/5,0)$ y $Y_1=(1/9,2/3,1/9,1/9)$.

4) Usando el método gráfico, determinar las soluciones de los juegos con las siguientes matrices de pagos:

$\begin{pmatrix}-1&4\\3&-6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&6\\3&4\end{pmatrix}$.

5) Consideremos cada uno de los juegos de suma cero que definen las siguientes matrices:

$A=\begin{pmatrix}4&5&1&4\\2&1&6&3\\1&0&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4&6\\3&1&5\end{pmatrix}$

Estudiar si tienen solución en estrategias puras.

En caso contrario transformarlos en un problema de PL y hallar las estrategias óptimas de cada jugador y el valor del juego.

6) Consideremos un juego de suma cero cuya matriz de pagos es $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\9&7&5&3&1\end{pmatrix}$.

Demostrar que dicha matriz no tiene punto de silla.

Hallar el nivel de seguridad del jugador I y una estrategia mixta de seguridad para él por dos procedimientos diferentes: el método gráfico y la PL.

7) Consideremos el juego

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Demostrar que el jugador I usando la estrategia maximin siempre puede asegurarse el pago de una cantidad $u_1 = 2$; no obstante u_1 no es necesariamente su nivel de seguridad porque la matriz no tiene un punto de silla. Demostrar que el nivel de seguridad del jugador I es $\frac{8}{3}$ que se obtiene con el uso de la estrategia mixta $X = (1/6, 0, 5/6)$.

8) Para cada una de las matrices que se muestran a continuación, que representan la matriz de pagos de un juego de suma cero, encontrar el problema de programación lineal que permite hallar la resolución del juego.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -1 \\ -9 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

9) Un juego de suma cero de dos jugadores con una matriz de pagos A nxn se dice simétrico si $A = -A^t$.

- Explicar porqué un juego teniendo $A = -A^t$ se llama un juego simétrico.
- Demostrar que un juego simétrico debe tener valor cero.
- Demostrar que si $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ es una estrategia óptima para el jugador I, entonces $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ es también una estrategia óptima para el jugador II.
- Estudiar cómo estas propiedades podrían ser empleadas para encontrar las estrategias óptimas de juegos simétricos. Aplicarlo al caso particular del juego $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (Winston, 1991) (*).

10) Interpretar el significado de las condiciones de holgura complementarias de la programación lineal en un juego de suma cero de dos jugadores (Winston, 1991) (*).

11) La teoría de juegos fue iniciada por Von Neumann quien demostró el teorema minimax para los juegos de suma cero. Von Neumann ha sido el último matemático polivalente que trabajó en numerosos campos como la lógica, el álgebra moderna, la teoría de la dualidad, el problema ergódico, los mecanismos de las reacciones nucleares, la formalización de la mecánica cuántica, la predicción meteorológica, resolvió el problema número 8 de Hilbert y fue el pionero en el diseño de los ordenadores. Exiliado húngaro se refugió de los nazis en Estados Unidos donde adquirió tremenda influencia en la maquinaria militar del pentágono. De convicciones profundamente anticomunistas, llegó a aconsejar al pentágono, utilizando la teoría de juegos, que tomase la iniciativa en un ataque nuclear a la Unión Soviética. Su perfil queda retratado en la película de Stanley Kubrick “¿Teléfono rojo?. Volamos hacia Moscú “ , como el Doctor Strangelove. Se plantea como ejercicio hacer una busca en Internet sobre Von Neumann y la teoría de juegos.